20.01.2023

Adı-Soyadı:

Numarası:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) $\int_{-1}^{1} \frac{9+6x}{\left(3x+x^2\right)^2}dx$ **has olmayan integralinin türünü ve karakterini belirleyiniz.**

2) $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ **ile tanımlı** (f_n) **fonksiyon dizisinin** $[0,2]$ **üzerinde düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.**

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$ **kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık kümesini bulunuz.**

4) $a_n=\left(\left(\frac{1}{\pi}\right)^n+1,\ \frac{\ln n}{n^2+1},\ \frac{\cos^3(n+3)}{n^3},\ \sqrt{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+5}\right)$ **olmak üzere** $(a_n)\subset\mathbb{R}^4$ **dizisinin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz. Yakınsak ise limitini bulunuz.**

5) $\mathbb{R}^4$ **de verilen** $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\arctan n}{n^2}\right)^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{3^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{2n}}{e^{2n}+1},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sin n)^n}{n^2}\right)$ **serisinin karakterini belirleyiniz.**

6) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2+2y=0\right\}$ **kümesi veriliyor. Bu kümeyi çiziniz ve aşağıdaki soruları cevaplayınız.**

   a) A **kümesinin açık küme olup olmadığını belirleyiniz ve iç noktaları kümesi olan** A° **kümesini bulunuz.**

   b) A **kümesinin konveks küme olup olmadığını belirleyiniz.**

   c) A **kümesinin bağlantılı küme olup olmadığını belirleyiniz.**

7) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x\leq 2\right\}$ **kümesi veriliyor. Bu kümeyi çiziniz ve aşağıdaki soruları cevaplayınız.**

   a) A **kümesinin yığılma noktaları kümesi olan** A' **kümesini, kapanışı olan** $\overline{A}$ **kümesini bulunuz ve** A **kümesinin kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz.**

   b) A **kümesinin kompakt küme olup olmadığını belirleyiniz.**

   c) $dış A$ **kümesini bulunuz.**

8) **Herhangi bir** $A\subset\mathbb{R}^n$ **kümesi veriliyor. Buna göre**

   a) A **kümesi kompakt bir küme ise** $\overline{A}$ **da kompakt mıdır? Evet ise ispatlayınız, hayır ise örnek veriniz.**

   b) A **kümesi hem açık hem de kapalı bir küme ise** $\partial A=\emptyset$ **olacağını gösteriniz.**

Not: 6 soru cevaplayınız. Sorular eşit puanlı, süre 90 dakikadır.

Dr. Nilay DEĞİRMEN

ANALİZ III CEVAP ANAHTARI

1-) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{9+6x}{(3x+x^2)^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{9+6x}{(3x+x^2)^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{9+6x}{(3x+x^2)^2}\,dx$ 2. tür has olmayan integral

$\boxed{3x+x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ veya } x=-3}$

$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{9+6x}{x^4+6x^3+9x^2}\,dx$ integralinin karakterini belirleyelim.

$$f(x)=\frac{9+6x}{x^4+6x^3+9x^2}, \quad g(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{9x^2+6x^3}{x^4+6x^3+9x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x^2}(9+6x)}{\cancel{x^2}(x^2+6x+9)} = 1 \in (0,\infty)$$

$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ $\quad p=2>1$ ıraksak

O halde Bölüm testi gereği $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{9+6x}{x^4+6x^3+9x^2}\,dx$ de ıraksaktır.

Sonuç olarak verilen integral ıraksaktır.

2-) $f_n:[0,2]\to\mathbb{R}, \quad f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x)$$

(f_n) fonksiyon dizisi $f=0$ fonksiyonu $[0,2]$ aralığında düzgün yakınsar.

$$c_n = \sup\{|f_n(x)-f(x)| : x\in[0,2]\}$$
$$= \sup\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2} : x\in[0,2]\right\} = g\left(\tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğunda yakınsama düzgün değildir.

$$g(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2} \Rightarrow g'(x)=\frac{n(1+n^2x^2)-nx\cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{n-n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n\overbrace{(1-(nx)^2)}^{\text{işareti belirler.}}}{\underbrace{(1+n^2x^2)^2}_{\text{pozitif}}}$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow 1-(nx)^2=0 \Leftrightarrow nx=\mp 1$$
$$\Leftrightarrow x=\mp\frac{1}{n}$$
$$-\frac{1}{n}\notin[0,2]$$

x	0	$\frac{1}{n}$	2
$g'(x)$	$+$	0	$-$
	$\nearrow$	yerel max. nokta	$\searrow$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} (x-1)^n$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, $x_0 = 1$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$= 1$ yakınsaklık yarıçapı

$(x_0-R, x_0+R) = (0,2)$

Verilen kuvvet serisi $(0,2)$ aralığında yakınsaktır. Uç noktalar ayrıca incelenir.

$x=0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ serisi elde edilir.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ olmak üzere $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ve (a_n) azalandır. O halde Leibnitz teoremi gereği seri yakınsaktır.

$x=2$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ serisi elde edilir.

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ dersek; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \in (0,\infty)$ olup Bölüm testi gereği $\sum a_n$ ile $\sum b_n$ aynı karakterdedir. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$, $p=\frac{1}{2}<1$ olup ıraksaktır. Dolayısıyla $\sum a_n$ de ıraksaktır.

Sonuç olarak yakınsaklık kümesi $[0,2)$ kümesidir.

4) $a_n = \Bigg(\underbrace{\left(\frac{1}{\pi}\right)^n + 1}_{x_n},\ \underbrace{\frac{\ln n}{n^2+1}}_{y_n},\ \underbrace{\frac{\cos^3(n+3)}{n^3}}_{z_n},\ \underbrace{\sqrt{\frac{1}{n^{3/2}}+5}}_{w_n} \Bigg)$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^n + 1 = 0 + 1 = 1$$

$\boxed{\frac{1}{\pi} < 1 \text{ old.}}$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2+1} \underset{LH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos^3(n+3)}{n^3}$$

$$-1 \le \cos^3(n+3) \le 1$$

$$\underbrace{-\frac{1}{n^3}}_{\downarrow\, 0} \le \frac{\cos^3(n+3)}{n^3} \le \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\downarrow\, 0}$$ olduğundan sıkıştırma

teoreminden $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^3(n+3)}{n^3} = 0$ dır

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\underbrace{\frac{1}{n^{3/2}}}_{\downarrow\, 0} + 5} = \sqrt{5}$$

$(x_n), (y_n), (z_n), (w_n) \subset \mathbb{R}$ dizileri yakınsak olduğundan
$(a_n) \subset \mathbb{R}^4$ dizisi de yakınsaktır ve limiti $(1, 0, 0, \sqrt{5})$ dir.

5) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan n}{n^2}\right)^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n},\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}}{e^{2n}+1},\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sin n)^n}{n^2} \right)$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2n}}{e^{2n}+1}$ serisi ıraksaktır; çünkü genel teriminin limiti 0 değildir.

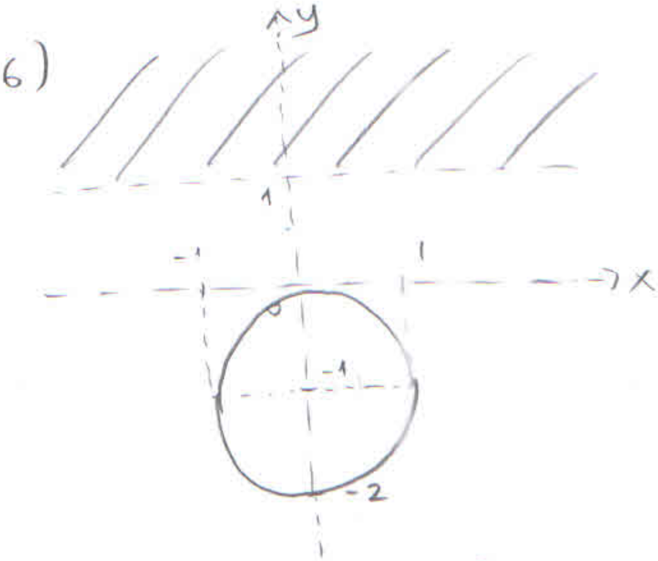
$$a_n = (-1)^n \frac{e^{2n}}{e^{2n}+1}$$

$$a_{2n} = \frac{e^{4n}}{e^{4n}+1} = \frac{\cancel{e^{4n}}}{\cancel{e^{4n}}\left(1+\frac{1}{e^{4n}}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$a_{2n+1} = -\frac{e^{4n+2}}{e^{4n+2}+1} = -\frac{\cancel{e^{4n+2}}}{\cancel{e^{4n+2}}\left(1+\frac{1}{e^{4n+2}}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} -1$$

$1 \neq -1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} a_n$ yoktur.

6)



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2+2y=0\}$

$x^2+y^2+2y=0 \Rightarrow x^2+(y+1)^2=1$

$M=(0,-1)$

$r=1$

a) A açık mı? $A^\circ = ?$

$\forall (x,y) \in A$ alalım.

$x \in \mathbb{R}$, $y>1$ olsun. $\varepsilon = y-1$ seçilirse $B((x,y),\varepsilon) \subset A$ olur.

Dolayısıyla $(x,y) \in A^\circ$ dir.

$x^2+(y+1)^2=1$ olsun. (çember üzerindeki noktalar) $\varepsilon>0$ yoktur. Dolayısıyla $B((x,y),\varepsilon) \subset A$ olacak şekilde $(x,y) \notin A^\circ$ dir. (örneğin; $(0,0) \in A$ ancak $(0,0) \notin A^\circ$ dir.)

Sonuç olarak A açık küme değildir. ve

$$A^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>1\}$$

dir.

b) A konveks mi?

$(0,0), (0,2) \in A$ noktalarını ele alalım. $\lambda = \frac{1}{2}$ için

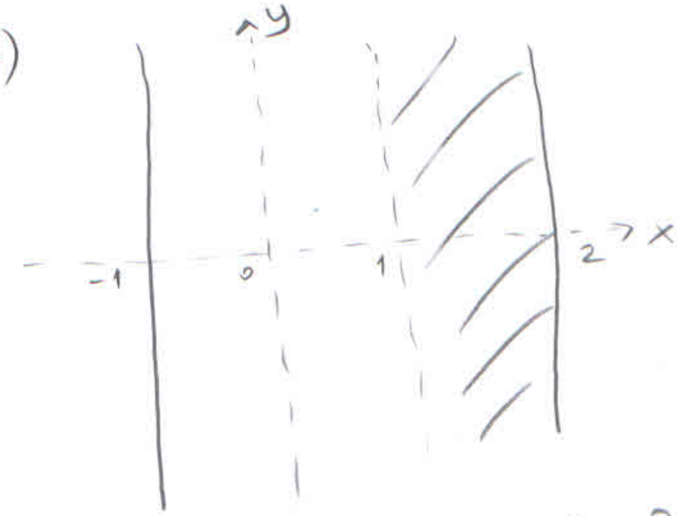
$\frac{1}{2}(0,0) + (1-\frac{1}{2})(0,2) = (0,0)+(0,1) = (0,1) \notin A$

olduğundan A konveks değildir.

c) A bağlantılı mı?

$V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{2}\}$, $V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < \frac{1}{2}\}$ alalım.

$A \cap V_1 \neq \emptyset$, $A \cap V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $A \subset V_1 \cup V_2$ ve V_1 ve V_2 kümeleri açık küme olduğundan A kümesi bağlantısızdır.

7) 

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x\leq 2\}$

a) $A'=?$ $\overline{A}=?$ A kapalı mı?

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ alalım.

$x<-1$, $y\in\mathbb{R}$ olsun. $\varepsilon=-1-x$ seçilirse $(B((x,y),\varepsilon)-\{(x,y)\})\cap A=\emptyset$ olup $(x,y)\notin A'$ dır.

$x=-1$, $y\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon>0$ için $(B((x,y),\varepsilon)-\{(x,y)\})\cap A\neq\emptyset$ olup $(x,y)\in A'$ dır.

$-1<x<0$, $y\in\mathbb{R}$ olsun. $\varepsilon=x+1$ seçilirse $(B((x,y),\varepsilon)-\{(x,y)\})\cap A=\emptyset$ olup $(x,y)\notin A'$ dır.

$0\leq x<1$, $y\in\mathbb{R}$ olsun. $\varepsilon=1-x$ seçilirse $(B((x,y),\varepsilon)-\{(x,y)\})\cap A=\emptyset$ olup $(x,y)\notin A'$ dır.

$1\leq x\leq 2$, $y\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon>0$ için $(B((x,y),\varepsilon)-\{(x,y)\})\cap A\neq\emptyset$ olup $(x,y)\in A'$ dır.

$x>2$, $y\in\mathbb{R}$ olsun. $\varepsilon=x-2$ seçilirse $(B((x,y),\varepsilon)-\{(x,y)\})\cap A=\emptyset$ olup $(x,y)\notin A'$ dır.

O halde $A'=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=-1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leq x\leq 2\}$ dir.

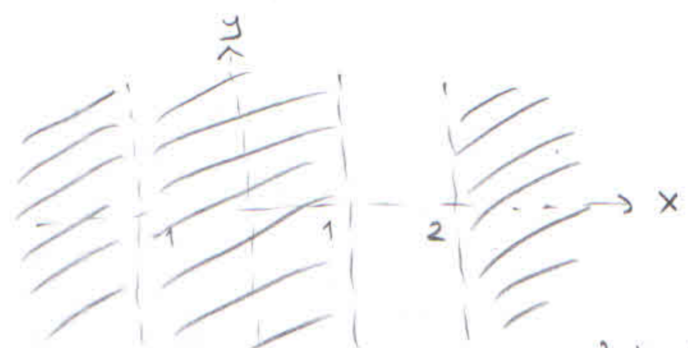
$\overline{A}=A\cup A'$ olduğundan $\overline{A}=A'$ olur.

$\overline{A}\neq A$ olduğu görülür. Dolayısıyla A kapalı küme değildir.

b) A kapalı küme olmadığı için kompakt olamaz.

c) dış $A=(\overline{A})^c$

$\overline{A}$



dış $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<-1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1<x<1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>2\}$

8) $A \subset \mathbb{R}^n$

a) A kompakt ise $\bar{A}$ da kompakttır:

A kompakt olduğundan sınırlıdır. Dolayısıyla $A \subset B[0,M]$ olacak şekilde $M>0$ vardır. Buradan $\bar{A} \subset \overline{B[0,M]} = B[0,M]$ yazılır ve $\bar{A}$ da sınırlı olur. Ayrıca $\bar{A}$ her zaman kapalı küme olduğundan $\bar{A}$ kompakttır.

b) A hem açık hem de kapalı küme ise $\partial A = \emptyset$ dur:

$\partial A = \bar{A} - A^\circ = A - A = \emptyset$

(A kapalı olduğundan $\bar{A} = A$ dır.)

(A açık olduğundan $A^\circ = A$ dır.)